

Algebra Booleana

Corso di Architettura degli elaboratori e laboratorio

Modulo Laboratorio

Gabriella Verga

Mappe di Karnaugh

Mappe di Karnaugh

Le Mappe di Karnaugh sono un metodo di tipo geometrico che permettono di ricavare rapidamente l'espressione logica di **costo minimo** della funzione. L'essenza del metodo è di rappresentare la tabella di verità in forma differente.

Vantaggioso per funzioni con poche variabili (3 o 4).

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



		$x_1 x_2$			
		00	01	11	10
x_3	0	1	0	0	0
	1	1	1	1	0

Mappe di Karnaugh

Sono ordinate in modo che caselle adiacenti abbiano solo una variabile dal valore differente.

Il principio delle mappe di Karnaugh e che : due quadrati adiacenti differiscono nel valore di una sola variabile.

Se accade che due caselle contengono il valore 1 e sono adiacenti nel senso geometrico (hanno un lato in comune) c'è la possibilità di effettuare un passo di semplificazione della funzione.

		$x_1 x_2$			
		00	01	11	10
x_3	0	1	0	0	0
	1	1	1	1	0

Come si usano

1. Raggruppare le caselle di valore 1 adiacenti orizzontalmente o verticalmente. Ogni gruppo deve presentare un numero di caselle contenenti un 1 pari a potenza di 2 (1,2,4,8).
2. Ogni gruppo rappresenta il prodotto delle sue variabili con lo stesso valore (forma **diretta** se **1** e **negata** se **0**). Identificare quali variabili non contribuiscono ed eliminarle nella forma analitica.
3. Somma dei gruppi creati.

		$x_1 x_2$			
		00	01	11	10
x_3	0	1	0	0	0
	1	1	1	1	0

Box blu: x_3 non contribuisce $\rightarrow \overline{x_1} \overline{x_2}$

Box blu: x_3 non contribuisce $\rightarrow x_2 x_3$

$$f_1 = \overline{x_1} \overline{x_2} + x_2 x_3$$

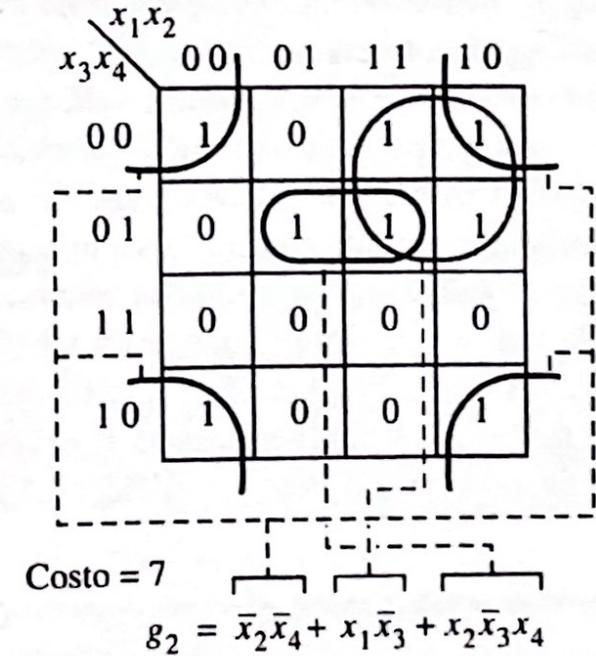
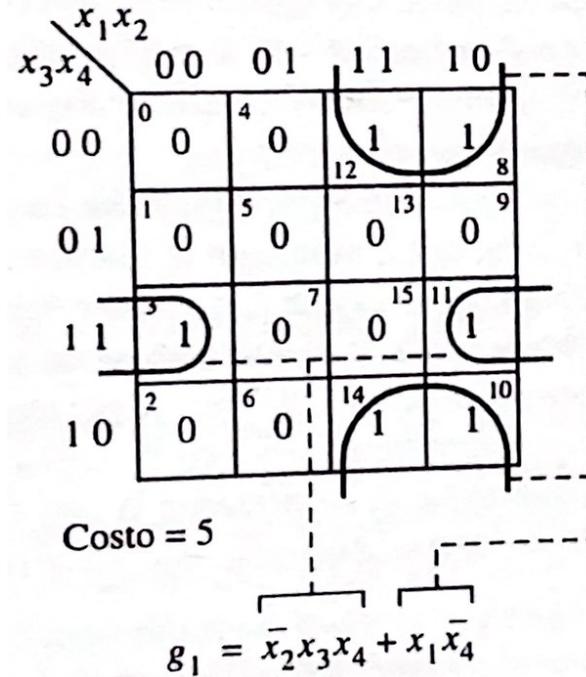
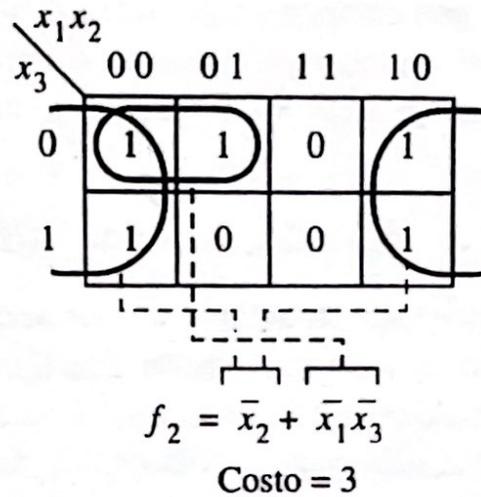
Altri esempi

$x_3 \backslash x_1 x_2$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	0	0	1

$x_3 x_4 \backslash x_1 x_2$	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	0	0
11	1	0	0	1
10	0	0	1	1

$x_3 x_4 \backslash x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Soluzioni



Condizione di indifferenza

Condizione di indifferenza

- Spesso capita che una funzione logica non sia definita su tutte le combinazioni di valori delle sue variabili
- Le variabili non usate si dice siano in condizione di indifferenza (don't care condition)
- Nella tabella di verità vengono indicate con il simbolo "X"
- Il loro valore (0 o 1) si può scegliere in modo arbitrario. Naturalmente conviene fare scelte che conducano alla semplificazione più spinta, ovvero a costo minimo.

Come si usa

Cifra decimale	Codifica binaria					f
	#	b_3	b_2	b_1	b_0	
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
2	2	0	0	1	0	0
3	3	0	0	1	1	1
4	4	0	1	0	0	0
5	5	0	1	0	1	0
6	6	0	1	1	0	1
7	7	0	1	1	1	0
8	8	1	0	0	0	0
9	9	1	0	0	1	1
Non usate	10	1	0	1	0	x
	11	1	0	1	1	x
	12	1	1	0	0	x
	13	1	1	0	1	x
	14	1	1	1	0	x
	15	1	1	1	1	x

(a) Tabella di verità

Come si usa

Cifra decimale	Codifica binaria					f
	#	b_3	b_2	b_1	b_0	
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
2	2	0	0	1	0	0
3	3	0	0	1	1	1
4	4	0	1	0	0	0
5	5	0	1	0	1	0
6	6	0	1	1	0	1
7	7	0	1	1	1	0
8	8	1	0	0	0	0
9	9	1	0	0	1	1
Non usate	10	1	0	1	0	x
	11	1	0	1	1	x
	12	1	1	0	0	x
	13	1	1	0	1	x
	14	1	1	1	0	x
	15	1	1	1	1	x

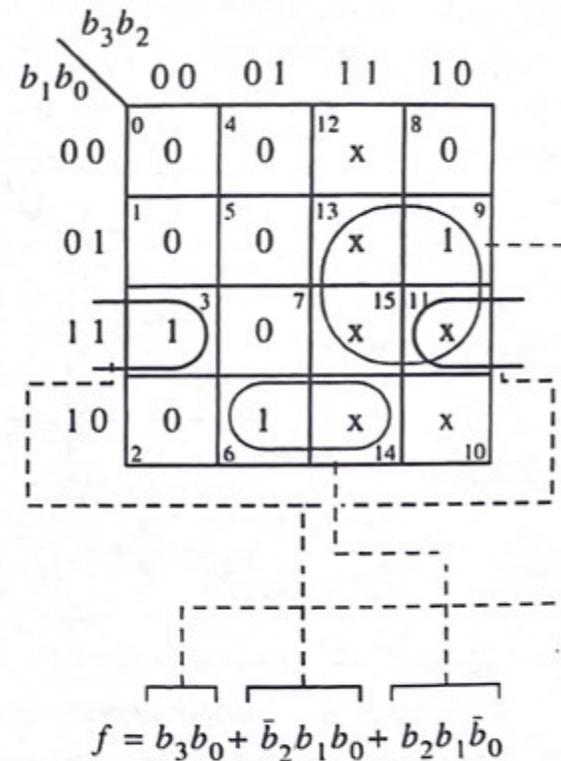
(a) Tabella di verità

		b_3b_2			
		00	01	11	10
b_1b_0	00	0	0	x	0
	01	0	0	x	1
	11	1	0	x	x
	10	0	1	x	x

Come si usa

Cifra decimale	Codifica binaria				f
	#	b_3	b_2	b_1	
0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1
2	2	0	0	1	0
3	3	0	0	1	1
4	4	0	1	0	0
5	5	0	1	0	1
6	6	0	1	1	0
7	7	0	1	1	1
8	8	1	0	0	0
9	9	1	0	0	1
Non usate	10	1	0	1	0
	11	1	0	1	1
	12	1	1	0	0
	13	1	1	0	1
	14	1	1	1	0
	15	1	1	1	1

(a) Tabella di verità

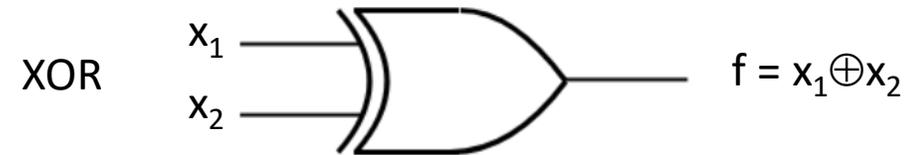
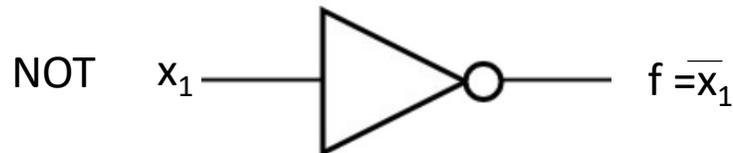
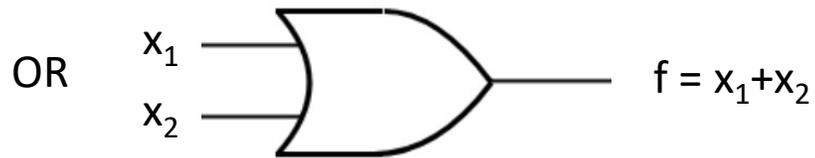


(b) Mappa a quattro variabili

Circuiti Logici

Circuiti Logici

- Le operazioni logiche (AND, OR, NOT, XOR) possono essere realizzate da semplici circuiti elettronici. **Questi circuiti base vengono chiamati PORTE.**

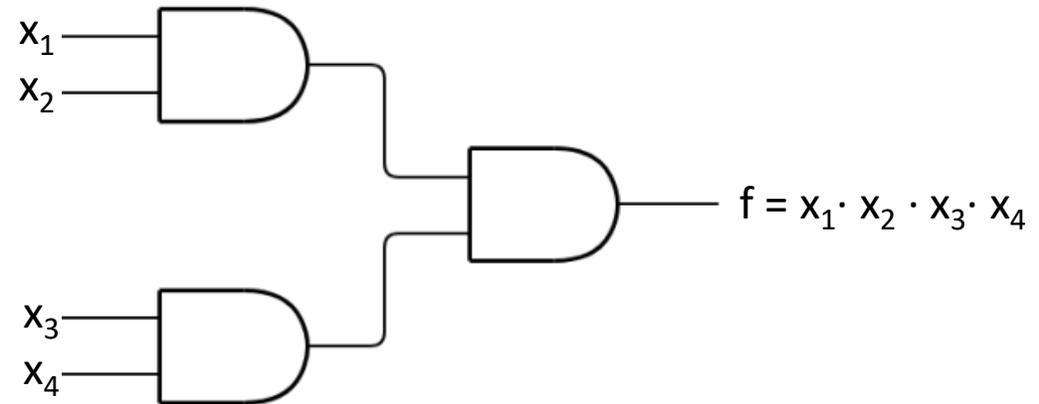
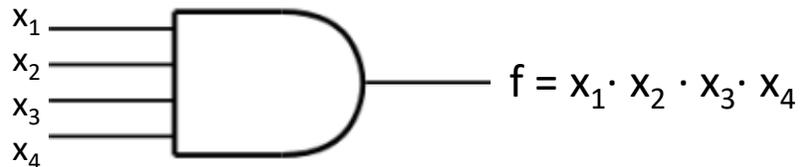


Collegando entrate e uscite delle porte si possono rappresentare le reti combinatorie, creando una rete di porte logiche collegate tra loro. Una rete combinatoria ha n ingressi binari ed m uscite binarie con n e $m \geq 1$.

Porte a più ingressi

- Grazie alla **proprietà associativa** AND e OR possono essere estese a più di 2 ingressi, ovvero mettere in due livelli a cascata o ad albero porte AND o OR a due ingressi.
- ESEMPIO:

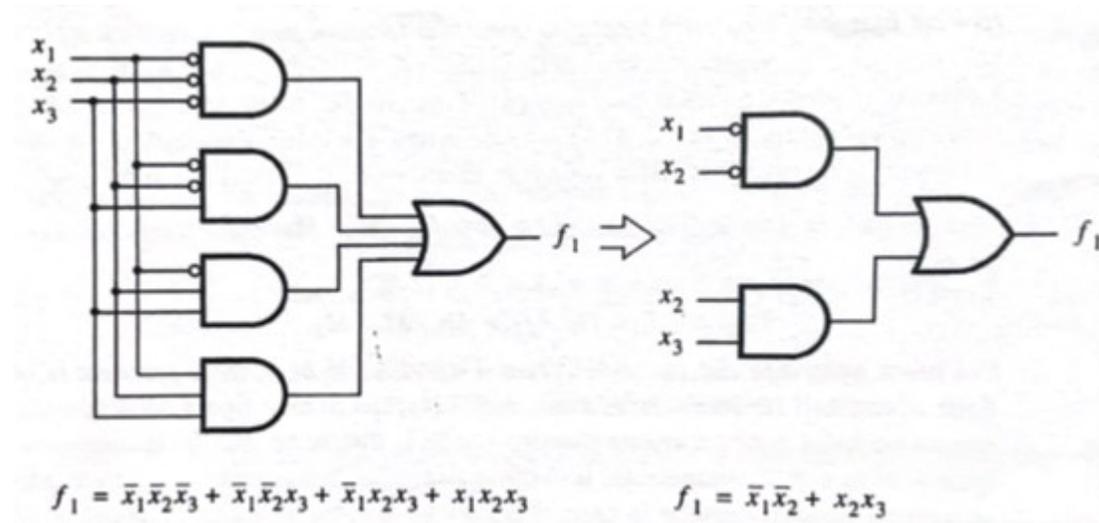
$f = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ → porta AND con 4 ingressi



Reti combinatorie

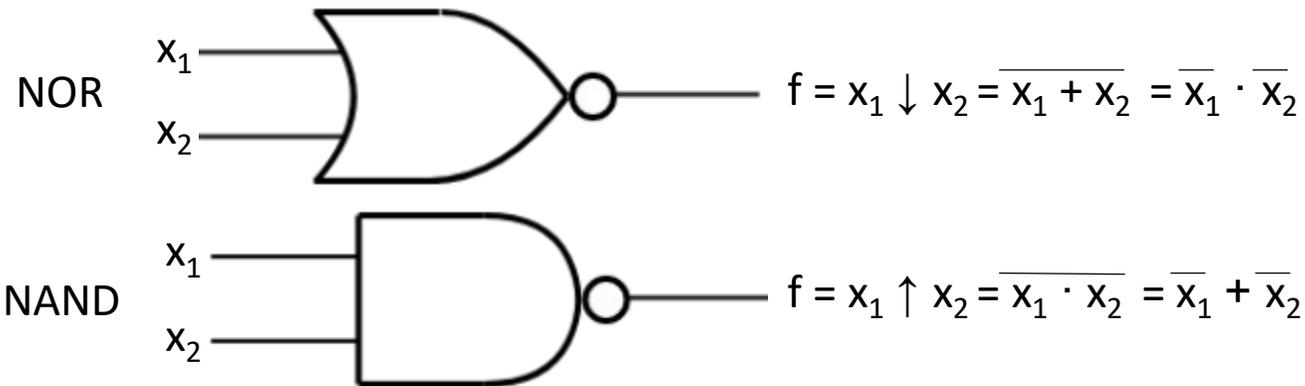
- E' possibile rappresentare un'espressione logica come rete combinatoria con:
 - una porta per ogni operatore logico
 - collegando le porte tra loro ad albero seguendo i livelli di priorità nell'espressione

Le espressioni *SOP* e *POS* corrispondono a reti a due livelli.



NAND e NOR

- Sono equivalenti alle funzioni AND e OR seguite da porta NOT (rispettivamente).
- Si denota tramite gli operatori a due argomenti " \uparrow " o " \downarrow " rispettivamente.
- NAND e NOR sono porte **UNIVERSALI**, ovvero si può realizzare una qualsiasi funzione combinatoria con reti logiche di soli NAND o soli NOR.



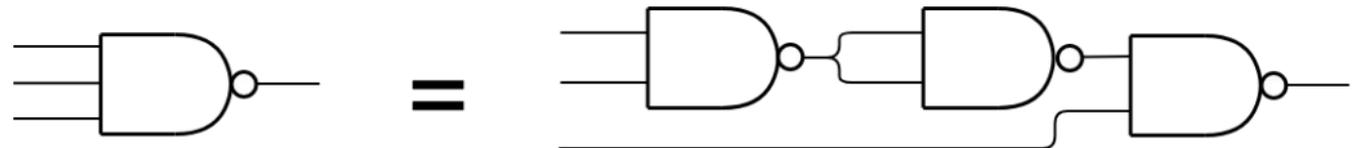
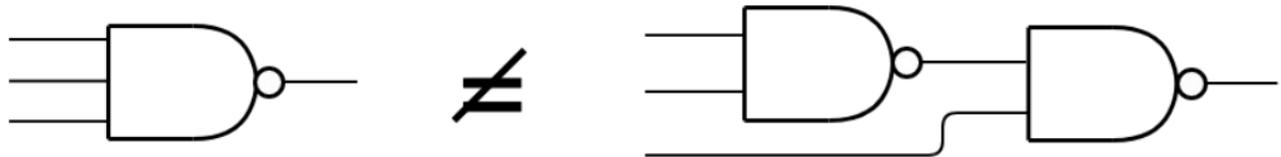
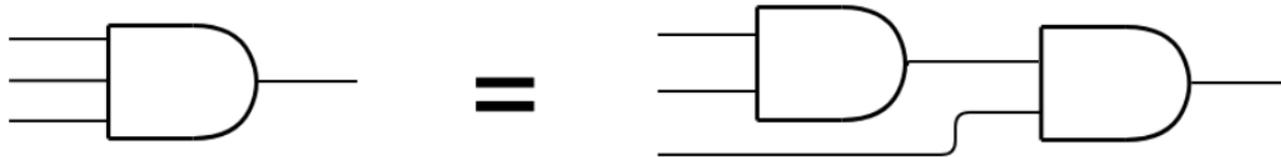
x_1	x_2	$\overline{x_1 + x_2}$	$\overline{x_1 x_2}$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

Proprietà

- NAND e NOR
- Godono della proprietà commutativa
- **NON** godono della proprietà associativa

Proprietà associativa

- Dato che NAND e NOR **NON** godono della proprietà associativa **NON** è possibile scomporlo come albero o cascata di porte.



Trasformazione di un'espressione (SOP)

- Grazie alle leggi di De Morgan e alla legge di involuzione possiamo passare da una **SOP** ad una rete di **NAND**:

$$\begin{aligned}(x_1 \uparrow x_2) \uparrow (x_3 \uparrow x_4) &= \overline{(\overline{x_1 \cdot x_2}) \cdot (\overline{x_3 \cdot x_4})} = \quad (\textit{De Morgan}) \\ &= \overline{\overline{x_1 x_2}} + \overline{\overline{x_3 x_4}} = \quad (\textit{Involuzione}) \\ &= x_1 x_2 + x_3 x_4 \quad (\textit{Sum of Products})\end{aligned}$$